1. x = 1/2+1/4+1/8+1/16 ..... 일 때 x의 값은?

1번 풀이:

주어진 식을 A 식이라고 두고, 양변에 1/2를 곱한 식을 만들어 이 식을 B라고 한다.

B 식: (1/2)x=1/4+1/8+1/16+1/32 …..

A 식에서 B 식을 빼 준다.

뺀 식: (1/2)x=1/2

양변에 2를 곱하면 x=1이라는 답이 나온다.

2. x = 1-1+1-1+1-1+1-1 ..... 일 때 x의 값은?

2번 풀이:

1과 -1을 더하면 0이므로 둘을 묶는다.

x = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1) …..

저 숫자들의 쌍은 무한하므로 0을 무한하게 더하는 것이 되어 답은 0이 된다.

\*\*이 문제는 직관적이라서 다른 해답이 없어 보이지만, 정답이 여러 개입니다!

답만 미리 알려드리자면 **1, 0, -1 전부 답이 될 수 있습니다.**

-1은 생각하기 조금 난해할 수도 있는데 재밌어요..ㅎㅎㅎ

답이 1/2(or -1/2)라는 말을 들은 것 같기도 한데 이건 해답을 못찾겠어요… 찾아주실분…

(다른 문제들은 수열이 전부 수렴하는데 이 문제는 수열이 진동하기 때문에 답이 다양합니다.)

3. x = 1/3-1/9+1/27-1/81 .... 일 때 x의 값은?

3번 풀이:

1번째 항과 2번째 항, 3번째 항과 4번째 항… 의 규칙으로 항을 둘씩 묶어 계산한다.

x = 2/9+2/81+2/729 …..

이 항들의 밑변을 3의 제곱수로 바꿔서 규칙성을 찾고, 이 식을 A라고 한다.

A 식: x = 2/3^2+2/3^4+2/3^6 …..

양변에 9(=3의 제곱)을 곱한다. 그리고 이 식을 B라고 한다.

B 식: 9x = 2+2/3^2+2/3^4+2/3^6 ….

B 식에서 A 식을 뺀다.

뺀 식: 8x=2

양변을 8로 나누면 x=1/4이다.

4. x = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 …. (즉, 자연수 전체의 합) 일 때 x는 몇이라고 말할 수 있을까? 왜 그럴까?

4번 풀이:

x를 하나의 유한한 값으로 정의해 보자.

x가 유한하다면 x는 수열의 1~n(마지막 항)까지의 수를 전부 더한 값이 된다.

그러나 자연수가 무한하기 때문에, n 이후의 n+1, n+2, n+3… 도 계속 더해주어야 한다.

따라서 유한한 x가 있다면 거기에 더 큰 자연수들을 계속 더해주어야 하므로, x는 유한한 값을 가질 수 없다. (마지막 항 n을 정의할 수 없다.)

따라서 x는 무한하다.

(수열의 발산.. 답은 항상 무한하죠ㅎㅎㅎ)

extra. 무한호텔이 있다. 이 호텔은 1호실, 2호실, 3호실... 순으로 호실이 무한하며, 현재 투숙객은 무한해 방은 다 찼다.

e-1. 이때, 투숙객 한 명이 도착했다. 이 사람은 몇 호실에 배치해야 할까? 객실이 다 찼는데 어떻게 배치해야 할까?

답: 미리 묵고 있던 투숙객을 한 호실씩 뒤로 물린다. 그러면 호실은 2호실, 3호실, 4호실 … 이 차게 되므로, 빈 1호실에 새 투숙객을 묵게 하면 된다.

e-2. 이때, 호텔 앞에 사람이 무한하게 들어갈 수 있는 무한 버스가 한 대 도착했다. 승객은 무한했고, 모든 사람이 이 무한호텔 하나에 묵고자 한다. 질문은 이하동문.

답: 미리 묵고 있던 투숙객을 호실 숫자에 2를 곱한 호실로 이동시킨다. (1호실->2호실, 2호실->4호실, 3호실->6호실…) 그러면 호실은 짝수 호실만 차게 되므로 홀수 호실에 새 투숙객을 묵게 하면 된다.

e-3. 이때, 호텔 앞에 사람이 무한하게 들어갈 수 있는 무한 버스가 무한 대 도착했다. 승객은 무한했고, 모든 사람이 이 무한호텔 하나에 묵고자 한다. 질문은 이하동문.

답: 일단 원래 묵던 투숙객을 호실 숫자에 2를 곱한 호실(짝수)로 이동시킨다. 그렇게 하면 홀수 호실이 비게 된다. 이때 소수가 무한하다는 성질을 이용한다. 어떤 소수 p이 있을 때, p의 n제곱수의 소인수는 p뿐이다. 따라서 첫 번째 무한버스의 승객은 3의 제곱수에, 두 번째 무한버스의 승객은 5의 제곱수에 … 식으로 배치하면 겹치는 호실 없이 완벽하게 배치할 수 있다. 무한버스는 무한하고, 소수도 같이 무한하므로 손님은 끝없이 들어오는 것이 가능하다.

(다양한 전제가 깔려 있습니다. 2가 아닌 소수의 제곱수는 항상 홀수이다, 소수는 무한하다, 소수와 자연수는 농도가 같은 셀 수 있는 무한집합이다 등등… 탐구해 보면 재밌을 것 같아요!)

참고 1: <http://imnt.tistory.com/102> 저는 이거 보고 e-3 이해했습니다. 깔끔하게 정리되었으니까 읽어보면 재밌을 듯…

참고 2: <http://imnt.tistory.com/103> 소수가 무한한 이유

e-4. 이때, 투숙객 한 명이 퇴실하고자 한다. 과연 이 손님이 퇴실하면 호실 중에 적어도 하나는 빈 것일까? 다 찼을까?

답: 내 개인적인 질문이니까 답도 개인적으로 해 보자면, 나는 유한의 관점으로 접근을 해보고자 한다. 물론 무한을 정의하는 것이라서 이렇게 하면 안 되는 걸 수도 있지만…

애초에 손님을 받으려면 호실이 하나 이상 비어 있어야만 한다. 그러나 호실이 다 찬 상태에서도 손님을 받았으니 이 호텔에는 무한의 성질 때문에 빈 호실이 어딘가에는 있을 것이라고 생각할 수 있고, (물론 빈 호실은 없는 것이 맞지만 유한의 개념으로 무한을 이해하자면 빈 호실이 떠오르게 된다) 이것은 반대로 해도 마찬가지가 되어야 한다고 생각한다. 즉 호텔은 한 명이 나갔지만 이곳은 무한호텔이기 때문에, 다 찬 상태였을 때도 ‘누군가 한 명이 묵을 방은 있고’, 지금 상태에서도 ‘누군가 한 명이 묵을 방은 있다’. 그리고 ‘투숙객은 무한하다’. 한 명이 나간 상태와 다 찼을 때의 상태가 동일하므로 나는 이 상태도 객실이 다 찬 것이나 다름없다고 생각한다. (가장 큰 수 x를 정의했을 때 x+1은 더 큰 수이므로, x는 가장 커야 하기 때문에 x=x+1이 될 수 있다. (진짜 가능한지는 잘 모르겠다) x+1을 y라고 정의하면, y-1=y가 된다. 그렇다면 무한에서 한 명이 빠져도 무한이 될 수 있는 게 아닐까…)